

TEMA N° 5-I: EXCEL AVANZADO. ÁNGULOS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EXCEL

Objetivo: Conocer y comprender el uso de las funciones trigonométricas que dispone Excel para luego aplicarlas en la solución de problemas del campo de la Ingeniería.

1. Introducción:

Existen varias formas de expresar los valores de los ángulos. Las más comúnmente utilizadas son las expresiones en el sistema sexagesimal que expresan los ángulos en grados sexagesimales, minutos y segundos (Ej.: $\alpha = 48^\circ 22' 35''$) y las expresiones en el sistema internacional (SI) para las medidas angulares cuya unidad es el radián (Ej.: $\beta = \pi/4$).

Como todas las funciones, se utilizan argumentos (variable independiente o datos) y devuelven resultados o valores. En el caso de las funciones trigonométricas que se van a tratar, se utilizan **argumentos** numéricos y éstas devuelven **valores** numéricos. En Excel las funciones trigonométricas utilizan como argumento **ÁNGULOS**. Estos **ÁNGULOS necesariamente deben ser expresados en RADIANES**. En el Programa, todas las funciones se encuentran agrupadas en categorías. Esto puede verse cuando se abre el Asistente de Funciones (Ilustración 2) desde el botón f_x en la barra de fórmulas o desde la pestaña Fórmulas el botón de Insertar función (Ilustración 1).

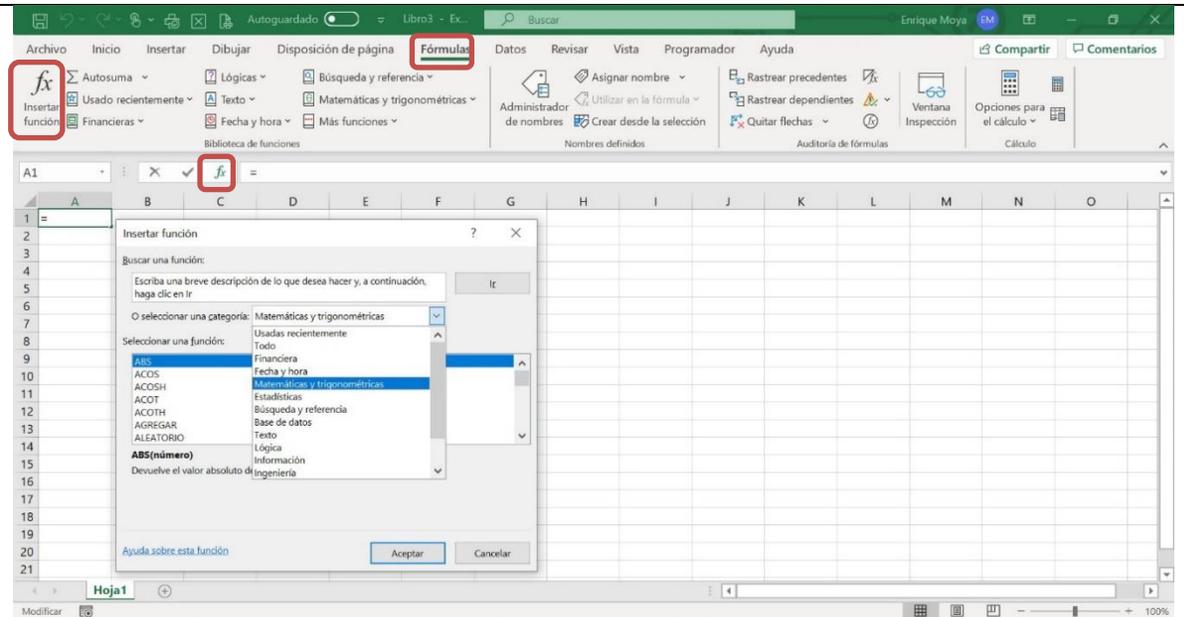


Ilustración 1

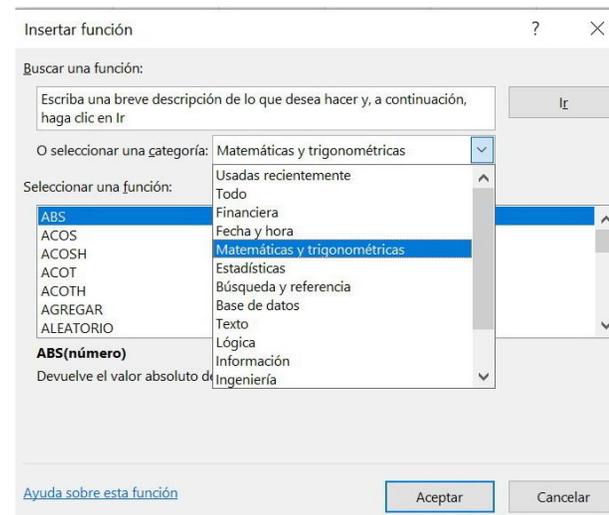


Ilustración 2

2. Funciones trigonométricas existentes:

En la Tabla 1 se muestran las funciones trigonométricas disponibles. Las trigonométricas básicas que se describen con más detalle en este apunte son las que están resaltadas.

Función **SENO(ángulo)**: Devuelve el seno de un número = “**ángulo**” que es el valor numérico del ángulo expresado en **RADIANES**.

Función **COS(ángulo)**: Devuelve coseno de un número = “**ángulo**” que es el valor numérico del ángulo expresado en **RADIANES**.

Función **TAN(ángulo)**: Devuelve la tangente de un número = “**ángulo**” que es el valor numérico del ángulo expresado en **RADIANES**.

Siempre que se expresan ángulos en la planilla ya sea como argumento o como resultado, éstos se expresan en **RADIANES**. Si se desea ver el valor numérico de los ángulos expresados en grados sexagesimales se deben utilizar las relaciones matemáticas entre los dos sistemas o bien utilizar las funciones de conversión que dispone el Programa (estas funciones son: **GRADOS** y **RADIANES**) que se describirán brevemente más adelante.

Tabla 1

NOMBRE Y SINTAXIS DE LA FUNCIÓN	RESULTADO
ACOS(número)	Arco coseno
ACOSH(número)	Coseno hiperbólico inverso
ASENO(número)	Arco seno
ASENOH(número)	Seno hiperbólico inverso
ATAN(número)	Arco tangente
ATAN2(coord. x; coord. y)	Arco tangente de las coordenadas x e y
ATANH(número)	Tangente hiperbólica inversa
COS(radianes)	Coseno
COSH(número)	Coseno hiperbólico
SENO(radianes)	Seno
SENOH(número)	Seno hiperbólico
TAN(radianes)	Tangente
TANH(número)	Tangente hiperbólica

3. Tres formas de introducir ángulos

1. Los grados, minutos y segundos en celdas distintas
2. Minutos y segundos como decimal
3. gg:mm:ss

A continuación se describirá cómo trabajar con cada una y la forma de introducirlo como argumento de las funciones trigonométricas.

3.1 Grados, minutos y segundos en celdas distintas

Se escribe el valor numérico de cada fracción del ángulo en celdas distintas. Es decir el valor numérico que representa los grados en una celda (la B2 para el ángulo α), los minutos en otra distinta (la celda C2) y los segundos en una tercera celda (la D2) como se muestra en la Ilustración 3.

Luego para poder expresarlo en una sola celda se deben convertir los minutos y segundos en una fracción decimal de los grados utilizando las relaciones matemáticas entre éstos ($1^\circ = 60 \text{ minutos} = 3600 \text{ segundos}$). En la barra de fórmulas de la Ilustración 3 se puede ver la fórmula que se utilizó para realizar la conversión mencionada para el ángulo α .

Necesariamente el valor del ángulo debe ser expresado en una sola celda para poder utilizarlo como referencia del argumento (dato de entrada de la función) de cualquiera de las funciones trigonométricas mencionadas.

	A	B	C	D	E
1		Grados	Minutos	Segundos	Grados y fracción
2	$\alpha =$	32	45	27	32,7575
3	$\beta =$	45	36	41	45,6114

Ilustración 3

Ejemplo: Se quiere utilizar como argumento de una función trigonométrica en Excel el ángulo $\beta = 45^\circ 36' 41''$

Para ello procedemos a introducir (como se muestra en la Ilustración 4) el valor numérico correspondiente a los grados en la celda B3, el valor de los minutos en la celda C3 y el valor de los segundos en la celda D3. Luego, como ya se ha explicado en la unidad anterior, se introduce una fórmula en la celda E3 para expresar el valor del ángulo en grados sexagesimales y su fracción decimal. Esta fórmula es la misma que se muestra en la Ilustración 3 para la celda E2 correspondiente al ángulo α , pero con referencia a las celdas del ángulo β , es decir: B3, C3, D3 (arrastrar fórmula).

Ahora que ya está expresado el ángulo en una sola celda se debe convertir en **RADIANES** para introducirlo como argumento de una función trigonométrica de Excel.

Para ello podemos utilizar la relación matemática que existe entre los grados sexagesimales y los radianes e introducirla en una fórmula en la celda **F3**. En la barra de fórmulas de la Ilustración 4 se muestra esta fórmula para realizar la conversión. Consiste simplemente en multiplicar el ángulo en grados y fracción de la celda **E3** por $[\pi /180]$ (Recordar que en Excel para introducir el número $\pi = 3,141592654 \dots$ debemos escribir **PI()**).

La otra alternativa es utilizar la función específica que posee Excel para convertir grados a radianes, esta es: **RADIANES(ángulo)**.

	A	B	C	D	E	F
1		Grados	Minutos	Segundos	Grados y fracción	RADIANES
2	$\alpha =$	32	45	27	32,7575	0,57173
3	$\beta =$	45	36	41	45,6114	0,79607

Ilustración 4

Es decir, en la celda **F3** llamar al asistente de funciones como se describió en la página 1 y buscar en la categoría de funciones Matemáticas y trigonométricas la función llamada **RADIANES**. Como para todas las funciones, el asistente de funciones muestra, abajo del nombre de la función, la sintaxis de la misma (**negrita**) y una breve descripción de lo que realiza la función (ver Ilustración 5). El argumento de esta función **RADIANES(ángulo)** debe ser el ángulo expresado en grados y fracción de la celda **E3**.

3.2 Minutos y segundos como decimal

Esta es la forma más compacta para expresar ángulos no enteros. Consiste en expresar la fracción de minutos y segundos como fracción decimal de los Grados.

Simplemente se basa en las siguientes equivalencias:

$$60 \text{ minutos} = 1 \text{ grado}$$

$$60 \text{ segundos} = 1 \text{ minuto}$$

$$\frac{60 \text{ min}}{\text{grado}} \times \frac{60 \text{ seg}}{\text{min}} \rightarrow 3600 \text{ seg} = 1 \text{ grado}$$

En la celda E2 de la planilla que figura en la Ilustración 3 se muestra la aplicación de estas equivalencias. Observar cómo en la barra de fórmulas se introducen estas relaciones.

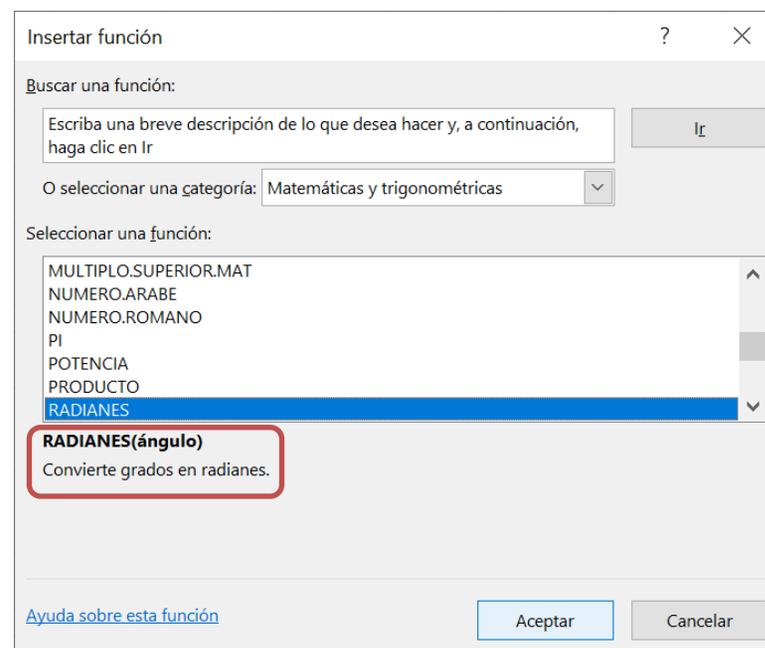


Ilustración 5

3.3 Grados, minutos y segundos separados con el operador dos puntos (gg:mm:ss)

En los subpartados anteriores se mostraron las dos primeras formas de expresar ángulos en grados sexagesimales y su correspondiente conversión a radianes.

La tercera forma de expresar ángulos es la que se muestra en las filas 6 a 8 de la

D7				
=RADIANES(C				
	A	B	C	D
1		Grados	Minutos	Segundos
2	$\alpha =$	32	45	27
3	$\beta =$	45	36	41
4				
5				
6		gg:mm:ss	gg°mm'ss"	RADIANES
7	$\alpha =$	32:45:27	32°45'27"	0,57173
8	$\beta =$	45:36:41	45°36'41"	0,79607
9				

Ilustración 6. Se escriben los grados y a continuación el operador “dos puntos” (:), luego los minutos separado de los segundos también por el operador “dos puntos” (:), todo en la misma celda B7 para el ángulo α ; y en la celda B8 para el ángulo β .

Se debe observar que en la barra de fórmulas de la planilla mostrada en la Ilustración 6 para la correspondiente conversión a RADIANES utilizando la Función provista por Excel (**RADIANES(ángulo)**) se ha multiplicado por un factor de 24 a la expresión del

D7						
=RADIANES(C7*24)						
	A	B	C	D	E	F
1		Grados	Minutos	Segundos	Grados y fracción	RADIANES
2	$\alpha =$	32	45	27	32,7575	0,57173
3	$\beta =$	45	36	41	45,6114	0,79607
4						
5						
6		gg:mm:ss	gg°mm'ss"	RADIANES		
7	$\alpha =$	32:45:27	32°45'27"	0,57173		
8	$\beta =$	45:36:41	45°36'41"	0,79607		
9						

Ilustración 6

ángulo descrita en este apartado (gg^omm'ss''), esto es porque este formato proviene de un formato de fecha preestablecido por el programa en donde las primeras 2 cifras corresponden a las horas de un día.

4. Cómo graficar funciones trigonométricas

Para graficar funciones trigonométricas en EXCEL se deben aplicar secuencialmente los pasos indicados en los párrafos anteriores para la conversión de ángulos expresados en grados sexagesimales a RADIANES y luego utilizar estos valores numéricos expresados en RADIANES como argumento de la función trigonométrica que se desea graficar. De esta manera se obtienen los valores numéricos de las funciones trigonométricas. En el ejemplo de la Ilustración 7 son los valores que figuran en las columnas D, E y F para la función SENO, COSENO y TANGENTE, respectivamente.

Ejemplo: Graficar las tres funciones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en un rango de 3 ciclos (recordar que un ciclo es una vuelta completa de la circunferencia trigonométrica: 360°).

Para lograrlo se describirá a continuación la secuencia de pasos que se debe realizar. Los resultados se muestran en la Ilustración 7.

TABULAR LOS VALORES DE ÁNGULOS EN GRADOS (columna B)
 ↓
 CONVERTIR VALORES EN GRADOS A RADIANES (columna C)
 ↓
 UTILIZAR LOS VALORES EN RADIANES

	A	B	C	D	E	F
		ANGULOS [°]	ANGULOS [RAD]	SENO(ang.)	COS(ang.)	TAN(ang.)
11						
12		0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
13		5	0,08727	0,08716	0,99619	0,08749
14		10	0,17453	0,17365	0,98481	0,17633
15		15	0,26180	0,25882	0,96593	0,26795
16		20	0,34907	0,34202	0,93969	0,36397
17		25	0,43633	0,42262	0,90631	0,46631
18		30	0,52360	0,50000	0,86603	0,57735
19		35	0,61087	0,57358	0,81915	0,70021
20		40	0,69813	0,64279	0,76604	0,83910
21		45	0,78540	0,70711	0,70711	1,00000
22		50	0,87266	0,76604	0,64279	1,19175
23		55	0,95993	0,81915	0,57358	1,42815
24		60	1,04720	0,86603	0,50000	1,73205
25		65	1,13446	0,90631	0,42262	2,14451
26		70	1,22173	0,93969	0,34202	2,74748
27		75	1,30900	0,96593	0,25882	3,73205
28		80	1,39626	0,98481	0,17365	5,67128
29		85	1,48353	0,99619	0,08716	11,43005
30		90	1,57080	1,00000	0,00000	
31		95	1,65806	0,99619	-0,08716	-11,43005
32		100	1,74533	0,98481	-0,17365	-5,67128
33		105	1,83260	0,96593	-0,25882	-3,73205
34		110	1,91986	0,93969	-0,34202	-2,74748
35		115	2,00713	0,90631	-0,42262	-2,14451
36		120	2,09440	0,86603	-0,50000	-1,73205
37		125	2,18166	0,81915	-0,57358	-1,42815
38		130	2,26893	0,76604	-0,64279	-1,19175
39		135	2,35619	0,70711	-0,70711	-1,00000
40		140	2,44346	0,64279	-0,76604	-0,83910
41		145	2,53073	0,57358	-0,81915	-0,70021
42		150	2,61799	0,50000	-0,86603	-0,57735
43		155	2,70526	0,42262	-0,90631	-0,46631

Ilustración 7

*PARA LOS ARGUMENTOS
DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (columnas D, E y F)*

Por razones de disponibilidad de espacio no se muestran todos los datos generados para graficar los 3 ciclos, sino sólo hasta los 155° .

Como puede observarse en la Ilustración 7 en la columna B se han expresado los valores de los ángulos en Grados sexagesimales, a intervalos de 5° para lograr una buena resolución de la gráfica.

En la columna siguiente, la C, utilizando alguna de las opciones explicadas se convierten cada uno de estos ángulos a **RADIANES** para recién poder utilizarlos como argumento de las funciones trigonométricas.

En la columna **D, E y F** se calculan los valores de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente de éstos ángulos expresados en radianes de la columna C, respectivamente.

Es muy importante notar que la función trigonométrica **Tangente** es discontinua en la serie: 90° ; 270° ; 450° ; 630°

Por lo tanto, para poder realizar el gráfico es necesario suprimir de la tabla generada los valores correspondientes (Ilustración 7).

Luego, como se explicó en unidades anteriores se debe seleccionar correctamente los datos de la tabla para poder realizar el gráfico que se observa en la Ilustración 8.

En este caso particular, se va a graficar los valores

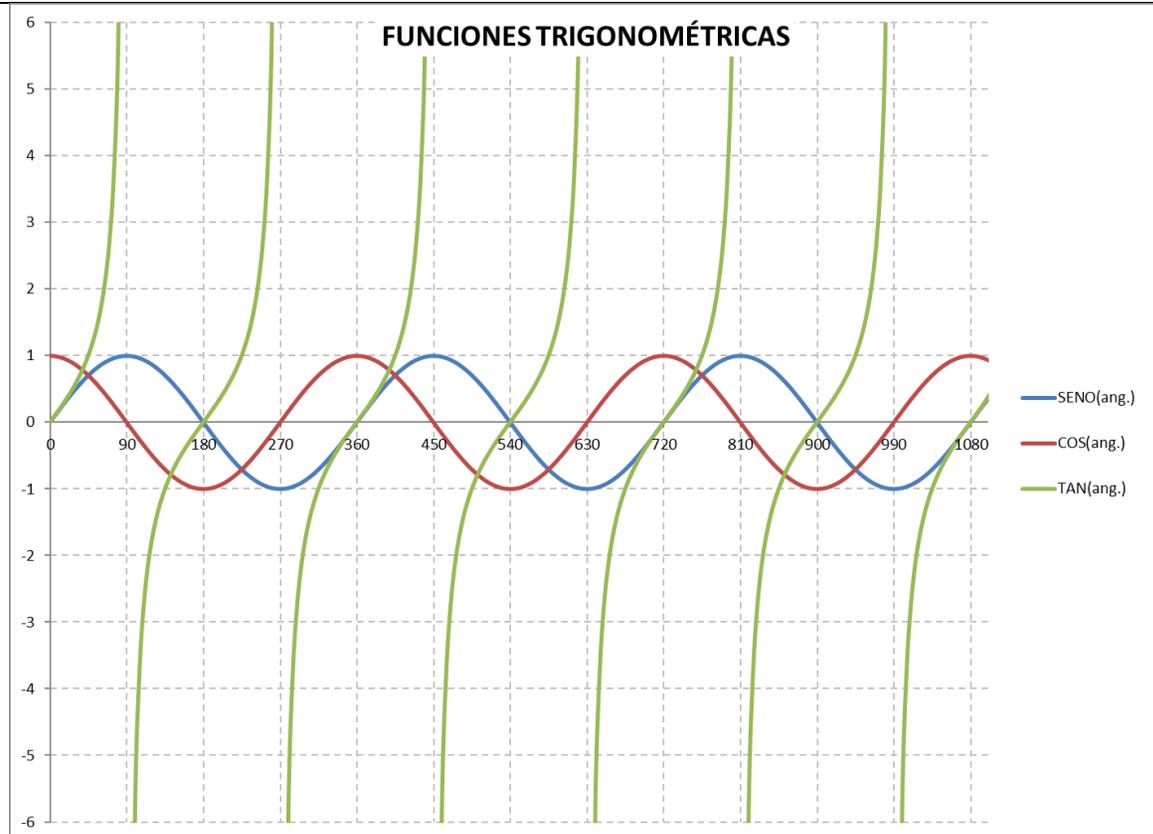


Ilustración 8

tabulados en la columna B de la Ilustración 7 como valores del eje de las abscisas (eje horizontal – eje x) y cada uno de los valores generados para las funciones trigonométricas **SENO**, **COSENO** y **TANGENTE** tabulados en las columnas D, E y F respectivamente como valores del eje de las ordenadas (eje vertical – eje y).

Para trazar el gráfico en este caso de pares ordenados en un sistema de referencia de ejes cartesianos como el que se muestra en la Ilustración 8 es necesario Insertar el tipo de gráfico denominado **Dispersión**. Recordando los procedimientos vistos en la unidad anterior para insertar este tipo de gráfico debíamos seleccionarlo desde la pestaña **INSERTAR**, en el grupo **Gráficos** seleccionar la opción **Dispersión**, como se muestra en la Ilustración 9.

Observar detenidamente en esta misma ilustración que para graficar la función **SENO** deben seleccionarse columnas alternadas, es decir, la columna de valores del eje horizontal: ángulos en grados que están en la columna B y los resultados de la función **SENO** de estos ángulos que están en la columna D. Como se explicó en la unidad anterior esto debía hacerse seleccionando en primer lugar la primera columna (columna B), luego manteniendo presionada la tecla [Ctrl] seleccionar la segunda columna de valores para el gráfico (en este caso de la función **SENO** es la columna D).

El procedimiento se repite para insertar los gráficos correspondientes a las columnas de la función **COSENO** y **TANGENTE**.

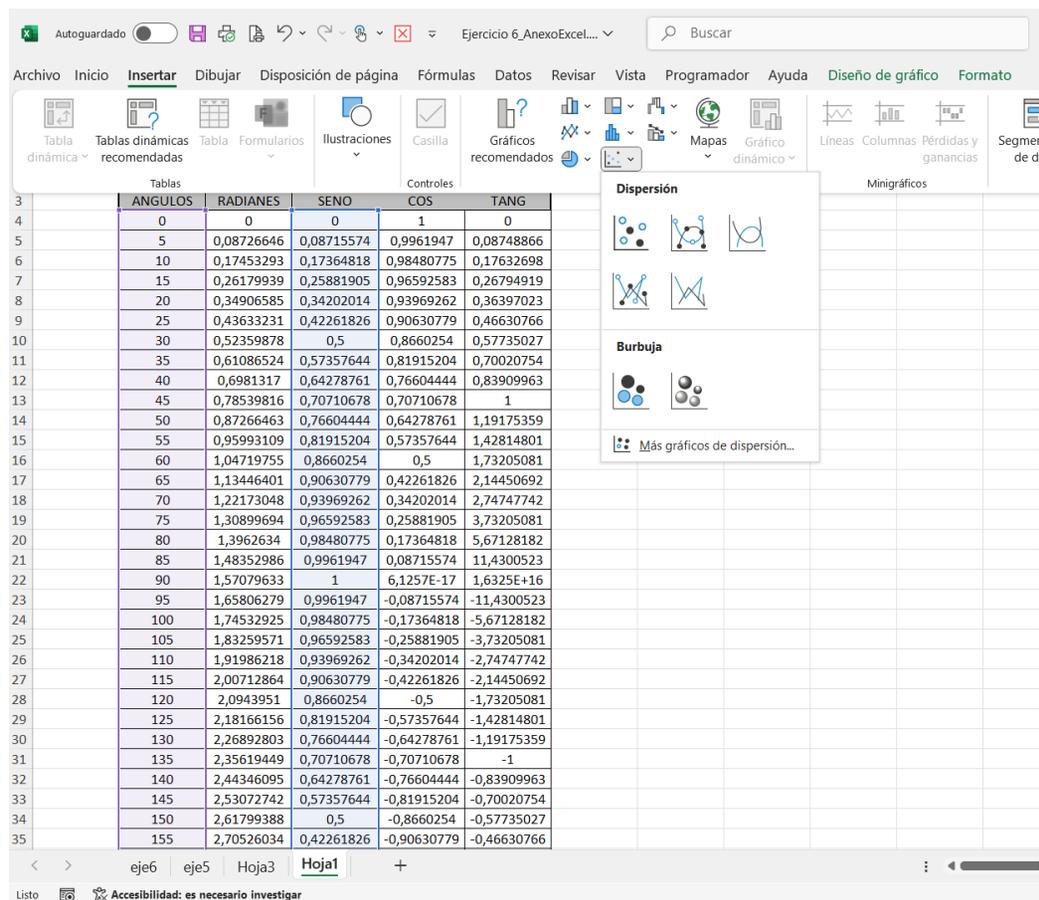
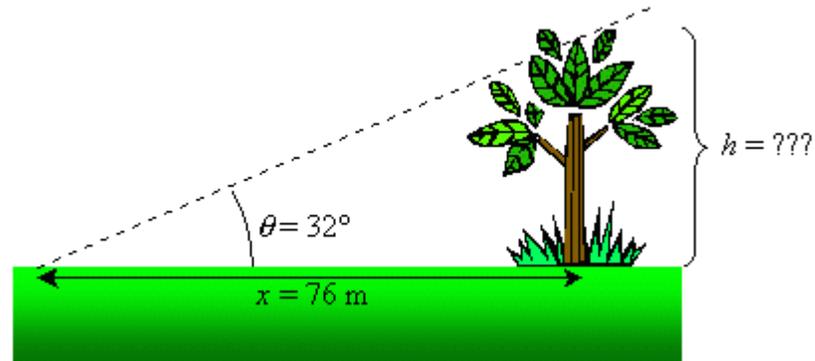


Ilustración 9

5. Ejercicios propuestos

Realizar los siguientes ejercicios propuestos en un libro de Excel donde cada ejercicio sea resuelto en una hoja distinta.

Ejercicio N° 1



Calcular la **altura del árbol** de la figura mostrada. Se sabe que si nos paramos a 76 metros de la base del árbol la línea de vista de la parte superior del árbol estará a 32° con respecto a la horizontal. Utilizar la relación que define la tangente de un ángulo ($\text{tg } \theta$) y las funciones trigonométricas correspondientes de Excel para resolver el Ejercicio.

Ejercicio N° 2

Para el mismo árbol del ejercicio anterior, cuál sería el ángulo θ de inclinación de la línea de vista a la parte superior del árbol con respecto a la horizontal, si nos paramos a 200 metros desde la base del mismo. Investigue utilizando el Asistente de Funciones la función **ATAN(número)** para responder la pregunta.

5. Ejercicios propuestos

Realizar los siguientes ejercicios propuestos en un libro de Excel donde cada ejercicio sea resuelto en una hoja distinta.

Ejercicio N° 3

Generar la tabla y graficar la función:

$$f(\alpha) = 2 \times \text{seno}(\alpha)$$

En el intervalo $-720^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$

Ejercicio N° 4

Generar la tabla y graficar la función:

$$f(\beta) = 3 \times \text{cos}(\beta) + 7$$

En el intervalo $0^\circ \leq \beta \leq 1440^\circ$

Ejercicio N°5

Estudiar la respuesta dinámica de una estructura es un problema fundamental de la Ingeniería Sismorresistente. Para realizarlo se establecen modelos mecánicos más o menos complejos.

La respuesta dinámica en vibraciones libres de un modelo estructural de un grado de libertad (1 GDL) con amortiguamiento viscoso equivalente, está dada por la siguiente ecuación:

$$x(t) = e^{-\omega_0 \eta \cdot t} \times [A \times \text{cos}(\omega_0 \cdot t) + B \times \text{seno}(\omega_0 \cdot t)]$$

En donde:

$x(t)$: Es la historia de los desplazamientos del sistema (posición "x" en cada instante de tiempo "t")

ω_0 : Es una frecuencia angular del sistema.

Observar que el producto " $\omega_0 \cdot t$ " utilizado en la ecuación como argumentos de las funciones trigonométricas tiene como unidad el "radián". Por lo tanto, la cantidad que debe dividirse en intervalos no son ángulos, sino que es el tiempo, que también es la cantidad que debe graficarse en abscisas (eje x). Recordar que la función exponencial $e^{-\omega_0 \eta \cdot t}$ en Excel debe ingresarse en la barra de fórmulas como **EXP(exponente)**.

Generar la tabla y graficar el movimiento para 15 segundos con los parámetros $\omega_0 = 4$; $\eta = 0,05$; $A = 2$; $B = 1$

5. Ejercicios propuestos

Realizar los siguientes ejercicios propuestos en un libro de Excel donde cada ejercicio sea resuelto en una hoja distinta.

Ejercicio N°6

Grafique de manera individual y luego la **suma** de las tres funciones que se dan a continuación. Utilice una escala en los ejes idéntica para las cuatro gráficas.

- Con el análisis de Fourier se demostró que una función periódica arbitraria se representa por medio de una serie infinita de sinusoides con frecuencias relacionadas de manera armónica. Esta forma trigonométrica de las Series de Fourier más el uso de ciertas técnicas numéricas tiene una potente utilidad en el análisis de la señal de **respuesta** de estructuras, cuyo estudio es de interés para la Ingeniería Civil, cuando son sometidas a acciones sísmicas donde la señal de entrada es de tipo general y arbitraria.

$$f1(t) = \frac{4}{\pi} \times \cos(\omega_0 \times t)$$

$$f2(t) = -\frac{4}{3\pi} \times \cos(3\omega_0 \times t)$$

$$f3(t) = \frac{4}{5\pi} \times \cos(5\omega_0 \times t)$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \times \cos(\omega_0 \times t) - \frac{4}{3\pi} \times \cos(3\omega_0 \times t) + \frac{4}{5\pi} \times \cos(5\omega_0 \times t)$$

$$\omega_0 = 4,2$$

$t =$ tiempo expresado en segundos (variable)

En el intervalo $-3s \leq t \leq 3s$

Observe luego de graficar que la gráfica obtenida se acerca a una onda rectangular de amplitud aproximadamente igual a 1,0 y periodo $T \cong 1,5$ segundos ($T = 2\pi/\omega_0$)

--	--

